Calcul vectoriel dans le plan

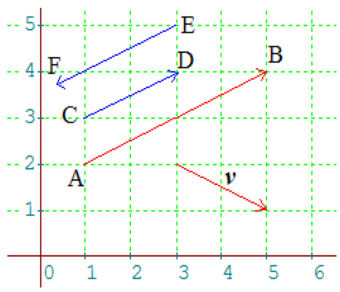
I) Vecteurs du plan

Soient A et B deux points du plan (P)

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

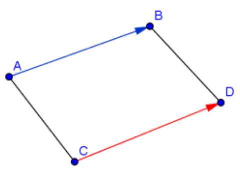
- une *direction* : celle d'une droite (AB)
- Un *sens* de parcours (dans la direction de la droite);
- une *norme* (ou *longueur*) et on note : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Exemple :



- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ ont même direction
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont de sens contraire.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ n'ont pas la même direction

II) L'égalité de deux vecteurs



Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme

Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots,$ on note ce vecteur $\vec{u}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants du même vecteur $\vec{u}$.
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (*L'opposé* du vecteur)
- pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul)

Propriété1 : Soient A ; B; C ; D des points du plan (P) tel que $A \neq B$ et $C \neq D$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Ssi ABDC est un parallélogramme

Propriété2 : Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ SSI $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Propriété3 : Etant donné un point A et un vecteur $\overline{u}$

il existe un point M unique tel que $\overline{AM} = \overline{u}$.

III) Somme de deux vecteurs

1) Relation de Chasles : Soit A, B, C trois points du plan.

On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles)

Remarque :

Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles (« factorisation »).
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles (« développement »).

Exemple :on considére les vecteurs :

$\vec{U} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}$

Simplifier les vecteurs : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Solution : $\vec{U} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$\vec{U} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{V} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$

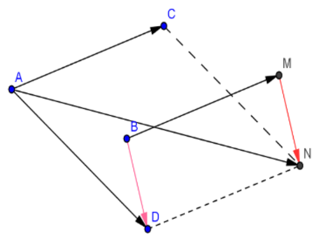
$\vec{V} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{EF} = \vec{0} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}$

Exercice : Soient A ; B; C ; D des points du plan (P)

1)construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

2)comparer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}$

Solutions :1)



2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$

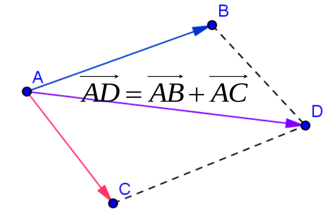
Donc : $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

2) Règle du parallélogramme : Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A un point du plan

il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme



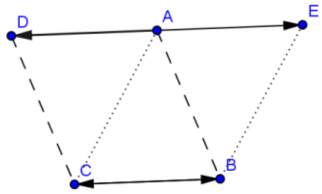
Application1 : Soient A, B, C trois points du plan non alignés et on considère D et E du plan tel que :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

1)Faire un schéma

2)Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre réponse

Réponse : 1) on a : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$



2) on a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EA}$

Donc le quadrilatère EACB est un parallélogramme

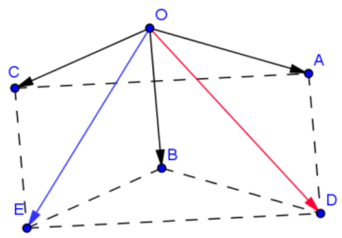
Application2 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et A, B, C, D, O , E des points du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{OE} = \vec{v} + \vec{w}$

1)Faire une figure

2)Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}$

donc ① $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$

Et on a :

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}$ donc

② $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OB}$

D'après ① et ② on a : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$

Donc : ACEB est un parallélogramme

Remarque : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la somme de $\vec{u}$ et $\left(-\vec{v}\right)$

on écrit : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$

Application3 :

Soit ABCD est un parallélogramme ;

on pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$

écrire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Réponse : ABCD est un parallélogramme donc :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{j} - \vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \vec{j} - \vec{i}$

on a : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{BD} = \vec{j} - 2\vec{i}$

IV) La multiplication d'un vecteur par un réel

1. Définition

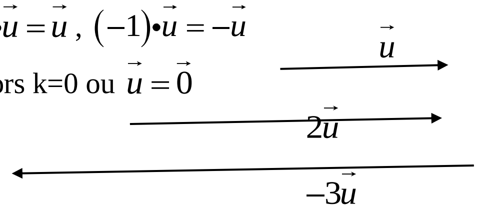
$\vec{u}$ un vecteur non nul et un nombre non nul k, on appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $k \bullet \vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes:

$k \bullet \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens si $k \succ 0$ et de sens contraire si $k \prec 0$

2. remarques :

$k \bullet \vec{0} = \vec{0}$ et $1 \bullet \vec{u} = \vec{u}$, $(-1) \bullet \vec{u} = -\vec{u}$

-Si $k \bullet \vec{u} = \vec{0}$ alors k=0 ou $\vec{u} = \vec{0}$



Application1 :

Soit A, B, C trois points du plan non alignés

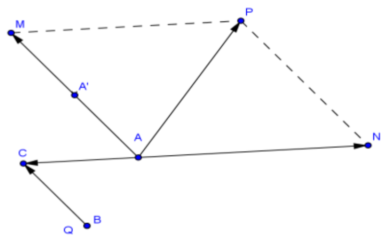
On considère M , N , P et Q du plan tel que :

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP}$

et $\overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}$

1)Faire une figure 2)En déduire que : $2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AP}$ et $B = Q$

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = 2\overrightarrow{BA}$

Donc $2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AP}$

Et on a : $\overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AQ}$

Donc $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}$ Donc $B = Q$

3. Propriétés :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b dans $\mathbb{R}$:1) $a\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=a\vec{u}+a\vec{v}$ 2) $\left(a+b\right)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

3) $a\left(b\vec{u}\right)=\left(a\times b\right)\vec{u}$ 4) $1\vec{u}=\vec{u}$ 5) $a\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=a\vec{u}-a\vec{v}$

6) $\left(a-b\right)\vec{u}=a\vec{u}-b\vec{u}$

Application 1: soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$ et

$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

Réponse : $\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$

$=2\vec{u}+2\vec{v}-4\times\frac{1}{2}\vec{u}+4\vec{v}$

$\overrightarrow{W_1}=2\vec{u}+2\vec{v}-2\vec{u}+4\vec{v}=6\vec{u}+\vec{0}=6\vec{u}$

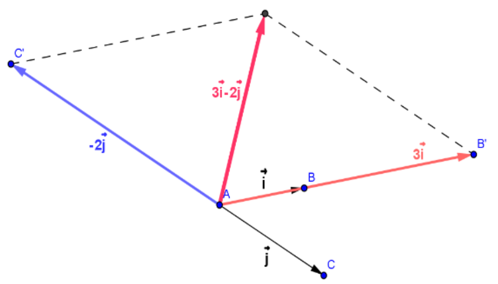
$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

$\overrightarrow{W_2}=\vec{u}-3\vec{v}+\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{u}=2\vec{u}+\vec{0}-2\vec{u}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Application2 : Soit ABC est un triangle

on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$ construire le vecteur $3\vec{i}-2\vec{j}$

Réponse :



V)La colinéarité de deux vecteurs

1.Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k\in\mathbb{R}$ telle que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Remarque :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.

2. Propriété

1) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

2) Soit (AB) une droite. Alors $M\in(D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

3) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Application 1 : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

1)Faire une figure

2)montrer que : Les points E , F et B sont alignés

Réponse : 1)

2) On a : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{CE}$

donc $\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{EC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=4\left(\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

Or on a : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ donc

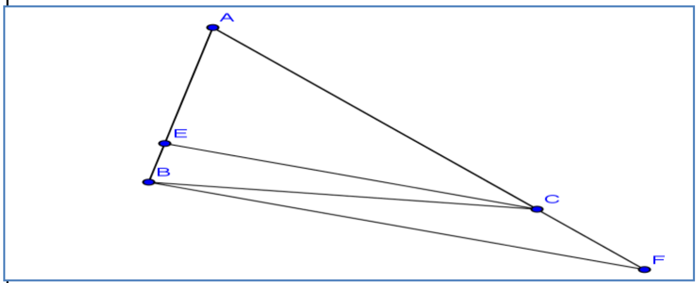
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ c a d $\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Alors : $\overrightarrow{BF}=4\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}\right)$ donc $\overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{EF}$

Donc $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

D'où Les points E , F et B sont alignés

Application 2: soit ABC est un triangle. Les points E et F



sont tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1)Faire une figure

2)écrire les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) montrer que deux droites $\left(EC\right)$ et $\left(BF\right)$ sont parallèles

Réponse : 1)

2) on a : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

et on a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ donc $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3) on a : $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc

$\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ Donc $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

D'où les droites $\left(EC\right)$ et $\left(BF\right)$ sont parallèles

VI) Milieu d'un segment

Propriété1 : Soient A, B et I trois points du plan.
Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est le milieu du segment [AB].

2) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ 3) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 4) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Propriété2 : Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.
I est le milieu du segment [AB] ssi pour tout point M on a :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration : supposant que I est le milieu du segment [AB] donc :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MB}$

$=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}=2\overrightarrow{MI}$

supposant que pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

on prend :M=I donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{II}=\vec{0}$

D'où I est le milieu du segment [AB]

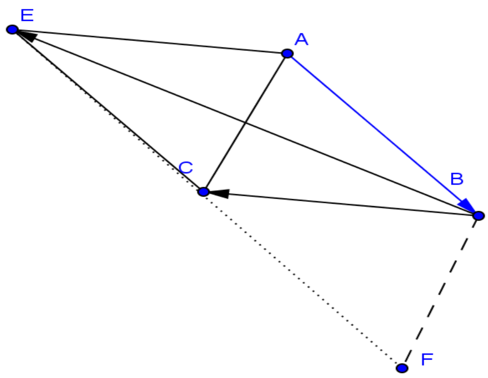
Application : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

1)Faire une figure

2)montrer que : C est le milieu du segment [EF]

Réponse : 1)



2) On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ donc ① $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}$

Et on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc ② $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Donc : C est le milieu du segment [EF]

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien